Zur Anormalität von Strahlen einer kinematisch erzeugten Kongruenz

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 40, 1988, S.21-28

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zur Anormalität von Strahlen einer kinematisch erzeugten Kongruenz

Von **Hans Robert Müller,** Braunschweig

(Eingegangen am 11.6.1988)

Eine Geradenkongruenz werde durch Bewegung einer Geraden bei einem flächenläufigen (2-parametrigen) Bewegungsvorgang $\mathbf{B}_2$ im 3-dimensionalen euklidischen Raum erzeugt. Der von *Levi-Civita* eingeführte Begriff der *Anormalität* eines Kongruenzstrahls stellt ein Maß für die Abweichung der Geraden von einer Normalgeraden dar. Ein Ausdruck hierfür wird unter Verwendung des *Cartan*schen Kalküls aus den den Bewegungsvorgang $\mathbf{B}_2$ bestimmenden Differentialformen hergeleitet; Eigenschaften und Anwendungen dieses Begriffs werden aufgezeigt. Auf dem Wege dahin werden zwei wenig bekannte Sätze aus dem 19. Jahrhundert, die von *Schönemann* und *Ribaucour* in einer synthetisch-geometrischen Betrachtungsweise gefunden wurden, analytisch bewiesen und diskutiert. Ohne Aufwand ergibt sich auch eine Verallgemeinerung des Satzes von *Malus-Dupin*.

I.

Der als ruhend angenommene 3-dimensionale euklidische Raum $\mathbf{R}'$ – er werde als Rastraum bezeichnet – werde durch ein rechtwinkeliges, rechtshändiges Dreibein $\{0';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}$ mit dem Ursprung $0'$ und den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i'$ repräsentiert. Die Lage eines starr beweglichen Körpers in $\mathbf{R}'$ hänge von zwei Parametern t_1,t_2 ab. Mit diesem Körper werde der Gangraum $\mathbf{R}$ verbunden, der durch ein ebensolches Dreibein $\{0;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ erfaßt werde. Variieren die Parameter in einem einfach-zusammenhängendem Gebiet der t_1,t_2-Ebene, so sagen wir: $\mathbf{R}$ beschreibt gegenüber $\mathbf{R}'$ einen flächenläufigen Bewegungsvorgang $\mathbf{B}_2$.

Wir setzen

$$\overrightarrow{0'0}=\mathbf{u}=\mathbf{e}_1u_1+\mathbf{e}_2u_2+\mathbf{e}_3u_3$$

und für einen Punkt $X\in\mathbf{R}$ bei festen Werten x_i für den Ortsvektor

$$\overrightarrow{0X}=\mathbf{x}=\sum\mathbf{e}_ix_i.$$

Differentiale von Vektoren seien auf das Rastkreuz $\mathbf{R}'$ bezogen, auftretende Funktionen werden stets von genügend hoher Differentiationsordnung vorausgesetzt. Wegen

$$\overrightarrow{0'X}=\mathbf{u}+\mathbf{x}$$

finden wir

$$d\mathbf{x}=\vec{\bar{\omega}}+\vec{\omega}\times\mathbf{x} \tag{1}$$

mit

$$\vec{\omega}=\mathbf{e}_1\omega_1+\mathbf{e}_2\omega_2+\mathbf{e}_3\omega_3 \text{ und } d\mathbf{u}=\vec{\bar{\omega}}=\mathbf{e}_1\bar{\omega}_1+\mathbf{e}_2\bar{\omega}_2+\mathbf{e}_3\bar{\omega}_3.$$

Hierbei liegen die Ableitungsgleichungen

$$d\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_j\omega_k-\mathbf{e}_k\omega_j \quad (i,j,k=1,2,3 \text{ zyklisch}) \tag{2}$$

für den Drehanteil der Bewegung zugrunde. Die $\omega_i,\bar{\omega}_i$ sind lineare Differentialformen (*Pfaff*sche Formen) in den Veränderlichen t_1,t_2. Sie müssen noch den Integrabilitätsbedingungen

$$d\omega_i+\omega_j\wedge\omega_k=0,\ d\bar{\omega}_i+\omega_j\wedge\bar{\omega}_k-\omega_k\wedge\bar{\omega}_j=0 \tag{3}$$

bei alternierender Produktbildung $\wedge$ und äußerer Ableitung $d\cdot\cdot$ genügen. Statt (3) kann man auch kurz

$$d\vec{\omega}+\frac{1}{2}\vec{\omega}\hat{\times}\vec{\omega}=0,\ d\vec{\bar{\omega}}+\vec{\omega}\hat{\times}\vec{\bar{\omega}}=0 \tag{4}$$

zusammenfassend schreiben. Die beiden Differentialvektoren $\vec{\omega},\vec{\bar{\omega}}$ bestimmen im Sinne von *R. S. Ball* eine Schraube, für die wir $\{\vec{\omega},\vec{\bar{\omega}}\}$ schreiben wollen.

Wir wollen die Eingliedrigkeit des in $\mathbf{B}_2$ enthaltenen reinen Drehvorgangs ausschließen, d.h. für die betrachteten Werte t_1,t_2 von den Differentialformen $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ genau zwei als linear unabhängig voraussetzen: $\vec{\omega}\hat{\times}\vec{\omega}\neq 0$.

Bei $\mathbf{B}_2$ beschreibt ein Punkt $X\in\mathbf{R}$ eine Bahnfläche. An der Stelle t_1,t_2 stellt

$$d\mathbf{f}_X=\frac{1}{2}d\mathbf{x}\hat{\times}d\mathbf{x}=\mathbf{n}\,df_X$$

das vektorielle Flächenelement der Bahnfläche von X dar. Dieser Vektor weist in die Richtung der Flächennormalen $\mathbf{n}$ und ist vom Betrag des skalaren Flächenelements df_X.

Eine orientierte Gerade g des Gangraums $\mathbf{R}$ werde durch ihren Richtungsvektor $\mathbf{g}$ mit $\mathbf{g}^2=1$ und den Ortsvektor $\overrightarrow{0X}$ eines auf g liegenden Punktes X erfaßt. In der Inzidenzbedingung $\bar{\mathbf{g}}=\mathbf{x}\times\mathbf{g}$ kann $\bar{\mathbf{g}}$ als Moment der „Einheitskraft" $\mathbf{g}$ in Bezug auf den Ursprung 0 gedeutet werden. Die sechs Koordinaten von $\mathbf{g},\bar{\mathbf{g}}$ sind normierte *Plücker*sche Geradenkoordinaten mit der Bedingung $\mathbf{g}\bar{\mathbf{g}}=0$.

Für ihre Differentiale findet man

$$d\,\mathbf{g}=\vec{\omega}\times\mathbf{g},\ d\,\bar{\mathbf{g}}=\vec{\bar{\omega}}\times\mathbf{g}+\vec{\omega}\times\bar{\mathbf{g}}. \tag{5}$$

Eine in $\mathbf{R}$ feste Gerade $g=\{\mathbf{g},\bar{\mathbf{g}}\}$ durchläuft bei $\mathbf{B}_2$ eine Strahlkongruenz.

II.

Eine spezielle Klasse von Strahlkongruenzen sind die *Normalensysteme (Normalenkongruenzen)*, die von den Flächennormalen in den ∞^2-Punkten einer stetig gekrümmten Fläche gebildet werden.

Die Geraden $g \in \mathbf{R}$ bilden bei $\mathbf{B}_2$ an der Stelle t_1, t_2 eine Normalenkongruenz, wenn $\mathbf{g}d\mathbf{x}=0$ ist. Hierbei soll X auf g liegen und bei $\mathbf{B}_2$ eine Bahnfläche als Leitfläche der Kongruenz beschreiben, also mit (1) die Bedingung $\mathbf{g}d\mathbf{x}=\mathbf{g}\vec{\bar{\omega}}+(\mathbf{g}\vec{\omega}\mathbf{x})=0$ oder

$$\mathbf{g}\vec{\bar{\omega}}+\bar{\mathbf{g}}\vec{\omega}=0 \tag{6}$$

gelten. Hierin bedeutet $(\mathbf{g}\vec{\omega}\mathbf{x})=\mathbf{g}(\vec{\omega}\times\mathbf{x})$. Die Bedingung (6) kann auch so interpretiert werden: Die Geraden g haben bezüglich der Schraube $\{\vec{\omega},\vec{\bar{\omega}}\}$ für fest gedachte t_1, t_2 und alle Fortschreitungsrichtungen $dt_1 : dt_2$ ein verschwindendes Moment. Diese Geraden bilden eine lineare Strahlkongruenz (Strahlnetz), das von *Th. Schönemann* [6] um 1855 etwa folgendermaßen eingeführt wurde: Werden vier Punkte allgemeiner Lage eines starren Körpers auf vier Flächen geführt, so wird dadurch der Körper einem flächenläufigen Bewegungsvorgang unterworfen. Die vier Flächennormalen in den Führungspunkten erzeugen für jede Lage des Körpers eine lineare Kongruenz. Alle weiteren Punkte des Körpers beschreiben Flächen, deren Normalen ebenfalls dieser Kongruenz angehören. Diese mit zwei Freiheitsgraden ausgestattete Bewegung läßt sich auch aus zwei Drehungen um die beiden Leitlinien (Brennlinien) der Kongruenz zusammensetzen. Die beiden Leitlinien werden als Rotationsachsen von *Schönemann* bezeichnet, sie können reell getrennt oder zusammenfallend oder konjugiert imaginär sein.

Um aus (6) Gleichungen des *Schönemann*schen Netzes zu gewinnen, die von $dt_1 : dt_2$ frei sind, bilden wir für $j=1,2,3$ die alternierenden Produkte von ω_j mit (6), d.h. mit

$$\sum(g_k\bar{\omega}_k+\bar{g}_k\omega_k)=0 \text{ (ausführlich geschrieben)}$$

und finden

$$\sum\{g_k\omega_j\wedge\bar{\omega}_k+\bar{g}_k\omega_j\wedge\omega_k\}=0.$$

Führen wir nun die Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_{jk}=\omega_j\wedge\bar{\omega}_k,\ \chi_i=\bar{\omega}_j\wedge\bar{\omega}_k,\\ \psi_i=\omega_j\wedge\omega_k,\ \bar{\psi}_i=\varphi_{jk}-\varphi_{kj}=\omega_j\wedge\bar{\omega}_k-\omega_k\wedge\bar{\omega}_j\end{array}\right\} \tag{7}$$

ein, so gelangen wir zu dem System

$$\begin{array}{l}\sum g_k\,\varphi_{1k}+\bar{g}_2\,\psi_3-\bar{g}_3\,\psi_2=0\\ \sum g_k\,\varphi_{2k}+\bar{g}_3\,\psi_1-\bar{g}_1\,\psi_3=0\\ \sum g_k\,\varphi_{3k}+\bar{g}_1\,\psi_2-\bar{g}_2\,\psi_1=0.\end{array} \tag{8}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen der Reihe nach mit ψ_1, ψ_2 bzw. ψ_3 (bei nichtalternierender Produktbildung) und Addition folgt

$$\sum g_k\,\varphi_{jk}\,\psi_j=0.$$

Da aber die g_k beliebig gewählt werden können, muß

$$\sum\varphi_{jk}\,\psi_j=0 \tag{9}$$

sein. In ähnlicher Weise findet man

$$\sum \varphi_{kj} \chi_j = 0. \tag{9'}$$

Die Zusammenfassung zu Vektoren führt wegen (4) und (7) zu

$$\left.\begin{aligned} \vec{\psi} &= \mathbf{e}_1\psi_1 + \mathbf{e}_2\psi_2 + \mathbf{e}_3\psi_3 = \frac{1}{2}(\vec{\omega} \hat{\times} \vec{\omega}) = -d\vec{\omega} \neq 0, \\ \vec{\bar{\psi}} &= \mathbf{e}_1\bar{\psi}_1 + \mathbf{e}_2\bar{\psi}_2 + \mathbf{e}_3\bar{\psi}_3 = \vec{\bar{\omega}} \hat{\times} \vec{\bar{\omega}} = -d\vec{\bar{\omega}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Wegen der invarianten Beziehungen (9) und wegen (10) sind von den drei Gleichungen (8) genau zwei linear unabhängig. Sie erzeugen als Schnitt zweier Gewinde eine lineare Strahlkongruenz, das Netz von *Schönemann.*

Die Differentialvektoren $\vec{\psi}, \vec{\bar{\psi}}$ zweiter Stufe bestimmen, ähnlich wie die Vektoren $\vec{\omega}, \vec{\bar{\omega}}$ erster Stufe, eine Schraube $\{\vec{\psi}, \vec{\bar{\psi}}\}$.

III.

Bisher, d.h. in II. wurde die Gerade g als Normale einer Bahnfläche vorausgesetzt, die von einem auf g liegenden Punkt X bei $\mathbf{B}_2$ beschrieben wurde. g ist dann auch Flächennormale aller Parallelflächen, die von Punkten X* mit $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{g}$ für $\lambda =$ konst. erzeugt werden. Wegen $\mathbf{g}d\mathbf{g} = 0$ ist mit $\mathbf{g}d\mathbf{x} = 0$ auch $\mathbf{g}d\mathbf{x}^* = 0$. Nun gehen wir wieder von einer Schar von ∞^2-Geraden aus, die von einer in $\mathbf{R}$ festen Geraden g bei $\mathbf{B}_2$ erzeugt werden. Diese Geraden sollen ebenfalls eine Normalenkongruenz bilden, jedoch zum Unterschied nicht notwendig Bahnflächen von $\mathbf{B}_2$ rechtwinkelig durchsetzen. Solche Geraden seien als *Normalgerade* bezeichnet; sie mögen eine Fläche $\mathbf{x} = \mathbf{g}_0 + \lambda\mathbf{g}$ rechtwinkelig schneiden, wobei $\mathbf{g}_0$ in der Gestalt $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g} \times \bar{\mathbf{g}}$ Fußpunkt des Lotes aus dem Ursprung 0 auf die Gerade g ist, bei $\mathbf{B}_2$ also eine Bahnfläche erzeugt. Wegen $\mathbf{g}^2 = 1$, $\mathbf{g}d\mathbf{g} = 0$ gilt

$$\mathbf{g}d\mathbf{x} = \mathbf{g}d\mathbf{g}_0 + d\lambda = 0. \tag{11}$$

Durch äußere Ableitung finden wir

$$d\mathbf{g} \wedge d\mathbf{g}_0 = d\mathbf{g} \wedge (d\mathbf{g} \times \bar{\mathbf{g}}) + d\mathbf{g} \wedge (\mathbf{g} \times d\bar{\mathbf{g}}) = -(\mathbf{g}d\mathbf{g} \wedge d\bar{\mathbf{g}}) = 0. \tag{12}$$

Hierbei wurde $(d\mathbf{g} \hat{\times} d\mathbf{g})\bar{\mathbf{g}} = 0$ Rechnung getragen. Dies erkennt man, wenn man mit (5) und (10) das vektorielle Flächenelement

$$d\vec{\sigma} = \frac{1}{2} d\mathbf{g} \hat{\times} d\mathbf{g} = \frac{1}{2}(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}\mathbf{g})\mathbf{g} = (\mathbf{g}\vec{\psi})\mathbf{g} \tag{13}$$

des sphärischen Bildes des Kongruenzstrahls g bildet. $d\sigma = \mathbf{g}\vec{\psi}$ ist dann das skalare Flächenelement. Durch Umformung von $(\mathbf{g}d\mathbf{g} \wedge d\bar{\mathbf{g}})$ gelangt man schließlich zu

$$\mathbf{g}\vec{\bar{\psi}} + \bar{\mathbf{g}}\vec{\psi} = 0. \tag{14}$$

Damit sind wir zu einem Ergebnis von *A. Ribaucour* [5] (1873) gelangt: Bei einem zweigliedrigen Bewegungsvorgang bilden an jeder Stelle t_1, t_2 die Geraden g des Gangraums $\mathbf{R}$, die Normalgerade ihrer Bahnscharen durchlaufen, ein Strahlgewinde (linearer

Strahlkomplex). In diesem Strahlgewinde von *Ribaucour* ist natürlich auch die Strahlkongruenz von *Schönemann* enthalten.

Durch äußere Ableitung von (6) ergibt sich mit (10)

$$\mathrm{d}\,(\mathbf{g}\vec{\bar{\omega}}+\bar{\mathbf{g}}\vec{\omega})=-3\,(\mathbf{g}\vec{\bar{\psi}}+\bar{\mathbf{g}}\vec{\psi}). \tag{15}$$

Die Bedingung (14) läßt auch folgende Deutung zu: Die Geraden g des *Ribaucour*schen Gewindes sind durch verschwindendes Moment hinsichtlich der Schraube $\{\vec{\psi},\vec{\bar{\psi}}\}$ gekennzeichnet.
Um eine von der Fortschreitungsrichtung dt_1,dt_2, d.h. genauer von $dt_1 \wedge dt_2$ unabhängige Gleichung dieses Gewindes zu erhalten, brauchen wir nur (14) durch $d\sigma=\mathbf{g}\vec{\psi}$ zu dividieren:

$$\frac{\mathbf{g}\vec{\bar{\psi}}+\bar{\mathbf{g}}\vec{\psi}}{\mathbf{g}\vec{\psi}}=0. \tag{16}$$

IV.

Nun fassen wir bei einem Bewegungsvorgang $\mathbf{B}_2$ Gerade g ins Auge, die weder der Gleichung (6) noch (14) genügen. Dann stellt der Ausdruck aus (16) ein Maß für die Abweichung der Geraden g von einer Normalgeraden dar. Die skalare Größe

$$\frac{\mathbf{g}\vec{\bar{\psi}}+\bar{\mathbf{g}}\vec{\psi}}{\mathbf{g}\vec{\psi}}=\mathrm{A} \tag{17}$$

werde als *Anormalität* oder auch *Anomalie* der bei $\mathbf{B}_2$ erzeugten Strahlkongruenz im Strahl g bezeichnet. Schreiben wir (17) in der Form

$$\mathbf{g}\,(\vec{\bar{\psi}}-\mathrm{A}\vec{\psi})+\bar{\mathbf{g}}\vec{\psi}=0, \tag{18}$$

so erkennen wir sofort, daß *alle Geraden g von gleicher Anormalität an der Stelle* t_1,t_2 *in* $\mathbf{R}$ *einen linearen Strahlkomplex bilden.* Für $\mathrm{A}=0$ deckt er sich mit dem Gewinde von *Ribaucour.*

Bei Variieren von A stellt (18) ein *Gewindebüschel* dar, das vom *Ribaucour*schen Gewinde und einem planaren Komplex mit der Gleichung $\mathbf{g}\vec{\psi}=0$ aufgespannt wird. Dies läßt die Schreibweise

$$(\mathbf{g}\vec{\bar{\psi}}+\bar{\mathbf{g}}\vec{\psi})-\mathrm{A}\,(\mathbf{g}\vec{\psi})=0 \tag{19}$$

erkennen. Die singulären Komplexe dieses Büschels sind einmal der planare Komplex (für $\mathrm{A}=\infty$) und das Strahlgebüsch für

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}_0=\frac{\vec{\psi}\vec{\bar{\psi}}}{\vec{\psi}\vec{\psi}}.$$

(18) geht für diesen Wert in

$$\mathbf{g}\,(\vec{\bar{\psi}}-\mathrm{A}_0\vec{\psi})+\bar{\mathbf{g}}\vec{\psi}=0$$

über und stellt die Schnittbedingung von g mit der Achse $\mathrm{a}=\{\vec{\psi},(\vec{\bar{\psi}}-\mathrm{A}_0\vec{\psi})$ der

Schraube $\{\vec{\psi},\overline{\vec{\psi}}\}$ dar. a ist auch gemeinsame Achse sämtlicher Gewinde des Gewindebüschels, sowie sämtlicher Schrauben $\{\vec{\psi},(\overline{\vec{\psi}}-A\vec{\psi})\}$. Hierbei wurde auf Normierung von a verzichtet.

Die Geraden des Gangraums **R** sind somit an jeder Stelle t_1,t_2 des zweigliedrigen Bewegungsvorgangs $\mathbf{B}_2$ in Form eines Gewindebüschels angeordnet: In den einzelnen Gewinden des Büschels sind die Geraden von jeweils gleicher Anormalität A zusammengefaßt.

Allen Gewinden ist eine lineare Strahlenkongruenz gemeinsam, die aus allen rechtwinkeligen Treffgeraden der Achse a besteht. Für dieses Netz – es wird auch als *Linienkreuz* bezeichnet – ist a die im Endlichen liegende Leitlinie (Brennlinie).

Spiegelbildliche Gerade bezüglich des Gewindes von *Ribaucour* sind bei Verzicht auf Normierung durch $g=\{\mathbf{g},\overline{\mathbf{g}}\}$ und $\mathbf{g}^*=\{\mathbf{g}^*,\overline{\mathbf{g}}^*\}$ mit

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{g}^* &= (\mathbf{g}\overline{\vec{\psi}}+\overline{\mathbf{g}}\vec{\psi})\vec{\psi}-(\vec{\psi},\overline{\vec{\psi}})\,\mathbf{g},\\ \overline{\mathbf{g}}^* &= (\mathbf{g}\overline{\vec{\psi}}+\overline{\mathbf{g}}\vec{\psi})\overline{\vec{\psi}}-(\vec{\psi},\overline{\vec{\psi}})\,\overline{\mathbf{g}}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

festgelegt. Gemäß (17) finden wir für die Anormalität A^* von g^* mit

$$A_0=\frac{\vec{\psi}\overline{\vec{\psi}}}{\vec{\psi}\vec{\psi}}$$

$$A^*=\frac{\mathbf{g}^*\overline{\vec{\psi}}+\overline{\mathbf{g}}^*\vec{\psi}}{\mathbf{g}^*\vec{\psi}}=\frac{A\,A_0}{A-A_0} \tag{21}$$

oder für $A\neq 0$

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{A^*}=\frac{1}{A_0}. \tag{22}$$

Diese Beziehungen bestehen zwischen den Anormalitäten A, A^* spiegelbildlicher Geraden g, g^* hinsichtlich des *Ribaucour*schen Gewindes.

Aus (11) und (12) entnimmt man

$$d(\mathbf{g}\,d\mathbf{x})=-(\mathbf{g}\,d\mathbf{g}\wedge d\overline{\mathbf{g}})=-(\mathbf{g}\overline{\vec{\psi}}+\overline{\mathbf{g}}\vec{\psi})$$

und nach dem Satz von *Stokes*

$$L=\oint_C \mathbf{g}\,d\mathbf{x}=\iint_\Phi(\mathbf{g}\overline{\vec{\psi}}+\overline{\mathbf{g}}\vec{\psi})=\iint_\Phi A(\mathbf{g}\vec{\psi})=\iint_\Phi A\,d\sigma, \tag{23}$$

wobei Φ ein Bereich der t_1,t_2-Ebene und C seine geeignet durchflaufene Randkurve ist. $d\sigma$ ist das skalare Flächenelement des sphärischen Bildes zum Kongruenzstrahl g. Das Integral L bedeutet die Öffnungsstrecke der durch C bestimmten geschlossenen Regelfläche innerhalb der Strahlkongruenz. Durch einen Grenzübergang, bei dem C sich auf einen Punkt zusammenzieht, gewinnt man für den Strahl g

$$\frac{dL}{d\sigma}=A. \tag{24}$$

Levi-Civita [4] führte 1900 die als „anormalità" bezeichnete Größe durch $A\mathbf{g} = -\operatorname{rot}\mathbf{g}$ oder

$$A = -\mathbf{g}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{g} = \sum g_i\left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k} - \frac{\partial g_k}{\partial x_j}\right) \tag{25}$$

ein. Hierbei wird die Abhängigkeit des Strahls g vom inzidenten Punkt X mit den Koordinaten x_j zugrunde gelegt und

$$d\,(\mathbf{g}\,d\mathbf{x}) = d\mathbf{g}\wedge d\mathbf{x} = \operatorname{rot}\mathbf{g}\cdot d\vec{0}$$

berücksichtigt.

$$(d\vec{0} = \frac{1}{2}\,(d\mathbf{x}\,\hat{\times}\,d\mathbf{x})$$

ist das vektorielle Flächenelement im Punkte X.) Bei Vergleich mit (23) gelangt man zu

$$A = -\operatorname{rot}\mathbf{g}\cdot\frac{d\vec{0}}{d\sigma}. \tag{26}$$

Für weitere Darstellungen und Eigenschaften von A vgl. *Ram Behari* [1], *Finikow* [2], *Hoschek* [3].

V.

Mit den angeführten Ergebnissen und Formeln können wir nun leicht eine Verallgemeinerung des Satzes von *Malus-Dupin* nachweisen. Erfolgt die Brechung (Spiegelung eingeschlossen) von Kongruenzstrahlen g nach dem Brechungsgesetz von *Snellius* an einer Fläche mit der Normalen h im Punkte X, so gilt für den Einfallswinkel α des Strahles g bzw. für den Ausfallswinkel (Brechungswinkel) α^* des gebrochenen Strahls g^*

$$\mathbf{g}\times\mathbf{h} = \mathbf{l}\sin\alpha, \text{ bzw. } \mathbf{g}^*\times\mathbf{h} = \mathbf{l}\sin\alpha^*.$$

Daraus mit dem Brechungsindex (Brechungsexponent)

$$n = \sin\alpha^* : \sin\alpha = \text{konst.}$$

die Beziehung

$$(\mathbf{g}^* - n\,\mathbf{g})\times\mathbf{h} = 0$$

oder

$$\mathbf{g}^* - n\,\mathbf{g} = \lambda\,\mathbf{h} \tag{27}$$

mit $\lambda = \sin(\alpha-\alpha^*) : \sin\alpha$. Zu (27) können wir auch über den Cosinus-Satz der sphärischen Trigonometrie für zwei sphärische Dreiecke gelangen.

Für die Anormalitäten von g, g^* und h ist

$$\mathbf{g}\vec{\psi} + \bar{\mathbf{g}}\vec{\psi} = A\,(\mathbf{g}\vec{\psi}), \qquad \mathbf{h}\vec{\psi} + \bar{\mathbf{h}}\vec{\psi} = 0.$$
$$\mathbf{g}^*\vec{\psi} + \bar{\mathbf{g}}^*\vec{\psi} = A^*\,(\mathbf{g}^*\vec{\psi}),$$

Mit (27) folgt auf Grund der Inzidenzbedingung mit dem Punkt X

$$\bar{\mathbf{g}}^* - n\,\bar{\mathbf{g}} = \lambda\,\bar{\mathbf{h}}. \tag{27'}$$

Somit ist

$$\mathbf{g}^* \vec{\psi} + \bar{\mathbf{g}}^* \vec{\psi} - n\,(\mathbf{g}\vec{\psi} + \bar{\mathbf{g}}\vec{\psi}) = 0$$

oder

$$A^*\,(\mathbf{g}^* \vec{\psi}) - n\,A\,(\mathbf{g}\vec{\psi}) = A^*\,d\sigma^* - n\,A\,d\sigma = 0 \tag{28}$$

und wegen (23)

$$L^* - n\,L = 0, \tag{29}$$

wodurch der von *Malus-Dupin* für Normalensysteme ($A = A^* = 0$) ausgesprochene Satz verallgemeinert ist. Die durch die geschlossene Kurve C bestimmten Strahlengarben vor und nach der Brechung werden von geschlossenen Regelflächen berandet, für deren Öffnungsstrecken (29) gilt. (Vgl. hierzu auch *Ram Behari* [1]!)

Neben (25) gilt für den gebrochenen Strahl g^* bzw. für die Normale h

$$A^* = -\,\mathbf{g}^* \operatorname{rot} \mathbf{g}^* \text{ bzw. } \mathbf{h} \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0.$$

Durch Einführen von (27) gelangt man schließlich wegen $\sin(\alpha - \alpha^*) \neq 0$ zu

$$A^* \cot \alpha^* = A \cot \alpha. \tag{30}$$

Literaturverzeichnis

[1] *Ram Behari:* The Differential Geometry of Ruled Surfaces, Lucknow-University Studies, Nr. XVIII (1946).

[2] *S. P. Finikow:* Theorie der Kongruenzen, Akademie-Verlag, Berlin (1959).

[3] *J. Hoschek:* Liniengeometrie, Bibliographisches Institut, Zürich (1971).

[4] *T. Levi-Civita:* Complementi al teorema di Malus-Dupin, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (5) 9_1 (1900), 185–189, 237–245.

[5] *A. Ribaucour:* Propriétés relatives aux déplacements d'un corps assujetti à quatre conditions, C.R. LXXVI (Paris) (1873), 1347–1351.

[6] *Th. Schönemann:* Ueber die Construction von Normalen und Normalebenen gewisser krummer Flächen und Linien, Berliner Monatsberichte 1855, pag. 255.